

Exercices – Séquence n° 15 – FONCTIONS (VI) : fonctions trigonométriques

Contenu	Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.
Capacités	- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi ; \pi]$. - Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER**Exercice 1** [Ra-Ca-Co]Calculer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3\cos(x) - \sin(x) + 3$ b) $g(x) = x^2\cos(x) + 3$ c) $h(x) = 3\cos\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)$ d) $i(x) = \cos(4x)\sin(-4x)$

Exercice 2 [Ra-Ca-Co]Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$.

- Montrer que la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ est : $f'(x) = \cos(x)(1 - 3\sin^2(x))$.
- Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = \cos(x)(3\cos^2(x) - 2)$.

Exercice 3 [Ra-Ca-Co]Soit f la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par : $f(x) = \sin^2(x) + 2\sin(x)$.

- Montrer que la dérivée de f sur $[0 ; \pi]$ est : $f'(x) = 2(\sin(x) + 1)\cos(x)$.
- Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; \pi]$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.

Exercice 4 [Ra-Ca-Co]Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

- Déterminer la valeur exacte de $f\left(-\frac{65\pi}{6}\right)$.
- La fonction f est-elle paire ? impaire ?
- La fonction f est-elle périodique de période 2π ? de période π ?

Exercice 5 [Ra-Ca-Co]Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\cos(2x) - \sin^2(x)$.

- Montrer que la fonction f est paire. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
- Montrer que la fonction f est périodique de période π . Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
- Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe représentative de f et vérifier les résultats précédents.

Exercice 6 [Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \cos(2x)$.

1. Montrer que la fonction f est paire et périodique de période π .
2. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. En déduire, à l'aide de la question 1, le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$.

Exercice 7 [Ra-Ca-Co]

À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre les équations suivantes sur $[-\pi; \pi]$:

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos(x) + 1 = \frac{1}{2}$ c) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos(x) = \frac{3}{2}$ e) $1 + 2\sin(x) = 0$

Exercice 8 [Ra-Ca-Co]

À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I :

a) $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; $I = [-\pi; \pi]$ b) $\cos(x) + 1 \leq \frac{1}{2}$; $I = [-\pi; \pi]$
c) $\cos(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $I = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ (on posera $X = 3x$) d) $\sqrt{2} \sin(x) + 1 > 0$; $I = [-\pi; \pi]$

Exercice 9 [Ra-Ca-Co]

1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'équation $\cos(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi; \pi]$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) > \sin(x)$ sur $[-\pi; \pi]$.

Exercice 10 [Ra-Ca-Co]

Démontrer les deux résultats suivants : a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

Exercice 11 [Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$: $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Avec la calculatrice, réaliser un tableau de valeurs de $f(x)$ sur $[0,01; 0,1]$ avec un pas de 0,01, puis sur $[0,001; 0,01]$ avec un pas de 0,001. Vers quelle valeur semble tendre $f(x)$ quand x tend vers 0 ?
3. Démontrer la conjecture précédente.

Exercice 12 [Ra-Ca-Co]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

1. Démontrer que f est périodique de période π .
2. Démontrer que f est une fonction impaire.
3. Étudier les variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 13 [Re-Ra-Ca-Co]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$.

1. Etudier la parité de la fonction f .
2. Etudier la périodicité de la fonction f .
3. Expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0; \pi]$.
4. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; \pi]$ (on admettra que : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$), puis dresser le tableau de variations de f sur $[-2\pi; 2\pi]$.
5. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

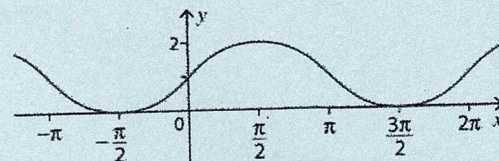
Exercice 14 [Ra-Ca-Co]

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

1. Démontrer que la fonction g est π -périodique.
2. Étudier le sens de variations de g sur $[0; \pi]$.
3. En déduire le tableau de variations de g sur $[-\pi; 2\pi]$. Justifier.

Exercice 15 [Re-Ra-Ca-Co]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne ci-contre la courbe représentative de sa fonction dérivée f' .



1. Reproduire le graphique et dessiner une allure possible de la courbe représentative de f .
2. On suppose que, pour tout réel x : $f'(x) = \sin(x) + k$, où k est un réel. Sachant que le point de coordonnées $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ appartient à la courbe représentative de f' , déterminer la valeur de k .
3. On donne $f(x) = x - 1 - \cos(x)$. Vérifier le résultat de la question précédente.
4. Déterminer le point de la courbe représentative de f dont l'abscisse appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ et auquel la tangente à la courbe de f a pour coefficient directeur 1.

Exercice 16 [Ra-Ca-Co] Encadrement de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

1. Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x - \sin(x)$.
 - a) Etudier les variations de la fonction f_1 .
 - b) En déduire que pour tout x de $[0; +\infty[$: $\sin(x) \leq x$.
2. Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)$.
 - a) Etudier les variations de la fonction f_2 sur $[0; +\infty[$ en vous aidant de la question 1.
 - b) En déduire que pour tout réel x : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$
3. a) Étudier le sens de variation de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_3(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) \qquad f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos(x)$$
 - b) Montrer que :
 - pour tout réel $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
 - pour tout réel x , $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
 - c) En déduire un encadrement de $\sin(0,01)$, puis de $\cos(0,01)$.

Exercice 17 [Ch-Ra-Ca-Co]

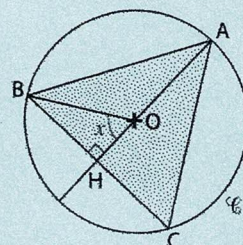
Une touriste se trouve sur la grande roue de Londres, surnommé le London Eye. Elle se demande combien de temps, lors du premier tour de la roue, elle se trouve à une hauteur supérieure à 400 pieds (le pied est une unité anglo-saxonne de mesure de longueur : 1 pied $\approx$ 30,48cm).

Répondre à la question de la touriste, sachant que le premier tour dure 30 minutes et que la hauteur (en pied) de la touriste en fonction du temps t (en minute), lorsqu'elle est sur la roue, est donnée par la fonction suivante : $f(t) = 225 \sin\left(\frac{\pi}{15}(t - 7,5)\right) + 225$.

**Exercice 18** [Mo-Ra-Ca-Co]

A est un point donné d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
B et C sont deux points variables du cercle $\mathcal{C}$ tels que le triangle ABC soit isocèle en A. H est le pied de la hauteur issue de A.

On note $x = \widehat{HOB}$ avec x en radian et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

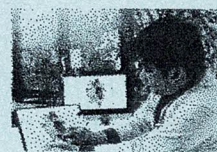


- Exprimer BC et AH en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
 - En déduire, en fonction de x , l'aire $S(x)$ du triangle ABC, en unité d'aire.
- Montrer que pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $S'(x) = (1 + \cos(x))(2\cos(x) - 1)$.
 - Expliquer pourquoi $2\cos(x) - 1$ est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - Dresser le tableau de variations de S .
 - Pour quelle valeur de x l'aire du triangle ABC est-elle maximum ? Indiquer ce maximum. Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

Exercice 19 [Re-Ra-Ca-Co]

Un battement de cœur se décompose en deux phases :

- la systole, période de contraction du cœur, avec éjection du sang dans les artères,
- la diastole, période de relâchement du cœur.

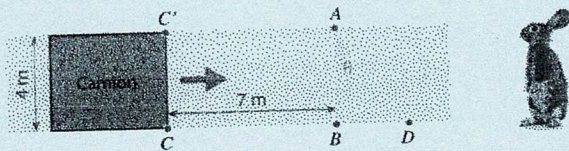


Chez un patient, le débit de sang pendant la systole est donné en fonction du temps t , en seconde, écoulé depuis la fin du cycle précédent par : $d(t) = 0,1 \sin(4\pi t)$ où $d(t)$ est exprimé en L.s⁻¹.

- Montrer que la fonction d est périodique de période $\frac{1}{2}$.
- Durant la systole, le débit croît puis revient à 0 L.s⁻¹.
 - Déterminer la durée de la systole et celle de la diastole.
 - Déterminer l'instant t où le débit est maximum.
- Dresser le tableau de variation de d sur $\left[0; \frac{1}{34}\right]$.
 - Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction d sur $[0; 1]$.

Exercice 20 [Mo-Ra-Ca-Co]

Un lapin veut traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la largeur de la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km.h⁻¹. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue sa traversée en ligne droite, au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à ... 30 km.h⁻¹ ! L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma suivant :

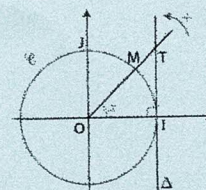


Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).

- Déterminer en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ les distances AD et CD, puis les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
- On pose : $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} - \frac{4}{\cos(\theta)}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
- Le lapin peut-il survivre ? Justifier.

Exercice 21 [Mo-Re-Ra-Ca-Co]**Partie A**

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct d'origine O et C est le cercle trigonométrique de centre O. Δ est la perpendiculaire à (OI) en I et M est le point de C image d'un réel x différent de $\frac{\pi}{2}$. Déterminer, en fonction de x , les coordonnées du point d'intersection T de (OM) et Δ .

**Partie B**

La fonction tangente est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

On se propose d'étudier des propriétés de cette fonction.

1. Un élément de symétrie

On note Γ , la courbe représentative de la fonction tangente dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que le point O est un centre de symétrie de Γ .

2. Etude sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

- Justifier que la fonction tangente est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et montrer que : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- En déduire le sens de variation de la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Étudier la limite de la fonction tangente en $\frac{\pi}{2}$, puis dresser son tableau de variation sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Courbe représentative

- Dans un repère orthogonal, représenter à la main une allure de la courbe Γ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- En déduire la courbe représentative de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Montrer que la fonction tangente est périodique de période π .
- Compléter la courbe Γ sur $\left]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

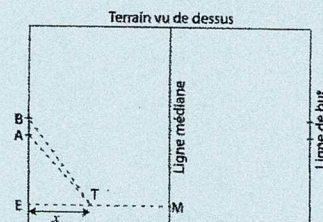
Exercice 22 [Mo-Re-Ra-Co] Application de la fonction tangente

Lors d'un match de rugby de la Coupe du Monde en 2019 au Japon, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E situé sur la droite (AB), à l'extérieur du segment [AB].

La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B.

Le joueur place le ballon en un point T qu'il peut choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculairement à la droite (AB) sauf en E.

Voici les dimensions du terrain : EM = 50 m, EA = 25 m, AB = 5,6 m.



On se propose de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum, et, si c'est le cas, de déterminer une mesure approchée de cet angle. On note x la longueur ET cherchée, en mètre.

On note x la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{ATB}$ avec $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

1. On admet que pour tous réels a et b de $]0; \frac{\pi}{2}[$: $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$.

Exprimer $\tan(\widehat{ETB})$ et $\tan(\widehat{ETA})$ en fonction de x .

En déduire que $\tan(x) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$.



2. Utiliser le sens de variation de la fonction tangente sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ pour justifier que l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque $\tan(x)$ est maximum.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur x_0 de x de $]0; 50]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0 . Indiquer alors la mesure de l'angle $\widehat{ATB}$, en radian, puis en degré (arrondir au centième).

Exercice 23 [Ca-Co]

Dans chacun des cas, déterminer toutes les primitives F de la fonction f définie sur l'intervalle I .

1) $f(x) = \cos(3x) + 4$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \frac{e^x}{(3e^x + 1)^5}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 24 [Ca-Co]

Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle :

$$y' = \sin(5x - 1); \quad f(x) = -\frac{1}{5}\cos(5x - 1).$$

Exercice 25 [Ca-Co]

Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle I vérifiant la condition indiquée.

1) $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right)$ sur $I = \mathbb{R}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

2) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ sur $I =]0; \pi[$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

3) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$ sur $I = \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$ et F s'annule en 0.

Exercice 26 [Ra-Ca-Co]

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \cos(x) - 3\sin(x)$.

- 1) Déterminer des nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit solution de (E).
- 2) Déterminer l'ensemble des solutions de $(E_0) : y' - y = 0$.
- 3) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
- 4) Déterminer la solution f de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Exercice 27 [Ra-Ca-Co]**Partie A – Étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos x$.

On appelle C_f la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

- 1) Montrer que, pour tout réel x : $-e^x \leq f(x) \leq e^x$.
En déduire que C_f admet une asymptote au voisinage de $-\infty$.
- 2) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
- 3) Démontrer que, pour tout réel x de $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
Calculer $f'(x)$ et montrer que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[+\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{2}\right]$.
- 4) Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ en précisant les valeurs en $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{2}$.
- 5) Démontrer que, sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α , puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- 6) On note f'' la fonction dérivée seconde de f .
 - a. Montrer que, pour tout réel x de $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) = -2e^x \sin x$.
 - b. En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera.
 - c. Déterminer alors l'équation de la tangente T à C_f en 0.

Partie B – Résolution d'une équation différentielle

On considère les équations différentielles : (E) : $y' - y = 0$ et (E') : $y' - y = -e^x \sin(x)$

où y désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 7) Résoudre l'équation (E).
- 8) Soit $f : x \mapsto e^x \cos x$ la fonction définie dans la partie A.
 - a. Montrer que la fonction f est solution de (E').
 - b. Montrer qu'une fonction g est solution de (E') si, et seulement si, $g - f$ est solution de (E).
 - c. En déduire toutes les solutions de (E').

Exercice 28 [Re-Ra-Ca-Co]

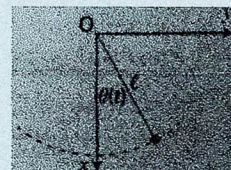
Un pendule simple est constitué d'un objet de masse m suspendu à un fil inextensible de longueur l , en mètre.

On le lâche dans le plan (xOy) en formant un angle θ_0 , en radian, avec l'axe (Ox) . (θ_0 étant assez petit).

$\theta(t)$ est l'angle, en radian, formé par l'axe (Ox) et le fil après t secondes ($t \geq 0$).

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire l'équation différentielle :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0 \text{ où } g \approx 9,81.$$



- 1) Vérifier que les fonctions de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où A et B sont des réels, sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, où ω est un réel positif.
Pour la suite de l'exercice, on admet que toute solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est de cette forme.
- 2) On donne : $l = 0,2 \text{ m}$; $\theta_0 = \frac{\pi}{36} \text{ rad}$ et la vitesse initiale est supposée nulle, c'est-à-dire $\theta'(0) = 0$.
Déterminer l'expression de la fonction θ .
- 3) Représenter la fonction θ à l'aide de la calculatrice et interpréter concrètement l'évolution de l'angle en fonction du temps.